

Les fondamentaux de la résistance des matériaux

Outils et méthodes de calcul
pour les structures

Jean-Armand Calgaro
Daniel Lecointre

Préface de Dominique Vié

EXPERTISE
TECHNIQUE
EDITIONS
LE MONITEUR

CHEC
Centre des Hautes Études
de la Construction

Avant-propos

Tous les corps solides présentent, à des degrés divers, des propriétés de résistance et de rigidité, c'est-à-dire peuvent, dans un domaine limité, réagir à l'application d'actions extérieures sans entraîner une rupture ou une variation sensible de leurs dimensions géométriques.

La résistance des matériaux étudie la résistance et la rigidité des constructions (au sens large). Son application repose sur les lois et les théorèmes de la mécanique générale, et, en premier lieu, sur les lois de la statique. Elle fournit des modèles de comportement simplifiés pour des corps déformables sans qu'il y ait des mouvements d'ensemble de ces corps et permet, ainsi, de calculer les efforts internes et les contraintes dans les éléments structuraux courants (poutres, dalles, coques). Par exemple, le fonctionnement d'un tablier de pont est d'abord globalement étudié dans le sens longitudinal selon un modèle de poutre en considérant que les sections transversales sont rigoureusement indéformables, puis on considère son comportement dans le sens transversal en tenant compte de la déformabilité des sections, pour apprécier le caractère tridimensionnel de ce fonctionnement.

Cette discipline peut être considérée comme une section de la mécanique, en général, appelée *mécanique des corps solides déformables* qui inclut, en particulier, la théorie de l'élasticité dont les notions de base sont condensées dans le premier chapitre de ce livre. Elle repose sur un certain nombre d'hypothèses et d'approximations que l'on oublie parfois, ou dont on sous-estime l'importance, lorsque l'on s'en écarte tant soit peu.

Il existe de nombreux traités de résistance des matériaux. Le présent ouvrage n'est pas un traité supplémentaire : il est un cours traitant du fonctionnement des principaux éléments structuraux rencontrés dans les structures de génie civil. La pratique de la voile dans les écoles destinées à former des officiers dont la marine à besoin répond aux besoins essentiels, pour les élèves, de formation maritime, d'apprentissage du milieu marin et d'une manière générale d'acquisition du sens marin. De même, la résistance des matériaux permet d'acquérir le « pied marin » dans le domaine de la construction. En effet, l'évaluation de la solidité des ouvrages complexes nécessite le recours à des logiciels de calcul numérique, mais encore faut-il être capable d'en interpréter les résultats. Il s'agit donc d'acquérir le « sens de l'ingénieur » pour comprendre comment se développent et transitent les efforts et les contraintes dans une structure. Et les ingénieurs et les techniciens doivent acquérir le sens des ordres de grandeur. C'est le but de la résistance des matériaux, une sorte de gymnastique intellectuelle.

Ce livre reprend, avec quelques extensions, un cours professé dans différentes écoles, mais principalement au CHEC (Centre des hautes études de la construction). Il permet d'effectuer des calculs sur la base de modèles simplifiés, mais il ne couvre qu'une petite partie de l'ensemble des techniques auxquelles on doit recourir selon la complexité des cas à traiter. En particulier, la dynamique ou le calcul post-élastique des structures ne sont pas traités. De même, les structures en forme de coques nécessitent des modèles de calcul qui ne sont pas abordés. Cependant, il détaille la naissance des contraintes dans les poutres sous divers modes de sollicitation (effort normal, effort tranchant, torsion) qui supposent un comportement élastique linéaire des matériaux. Un chapitre propose une synthèse des diverses

méthodes, dont certaines historiques par lesquelles le calcul des dalles et des plaques a été développé, méthodes qui sont encore utilisées dans les cas ne nécessitant pas un calcul aux éléments finis. Pour les structures à barres ou à poutres, planes ou tridimensionnelles, les méthodes dites *des forces* et *des déplacements* sont décrites : elles sont utilisables manuellement dans les cas simples, notamment pour le calcul des poutres droites à travées multiples. Les phénomènes d'instabilité élastique sont abordés par des méthodes relativement originales, mais un traité complet pourrait leur être consacré. Enfin, un dernier chapitre a pour but de montrer la complexité du comportement des structures spatiales en s'appuyant sur l'exemple simple d'une poutre plane et courbe, chargée perpendiculairement à son plan.

Les auteurs espèrent que ce livre, plus original dans sa présentation que dans son contenu, se révélera utile pour la formation des élèves ingénieurs et techniciens dans le domaine du BTP, mais également pour les ingénieurs confirmés qui souhaitent mettre à jour quelques connaissances élémentaires sur le fonctionnement des structures.

Jean-Armand Calgaro et Daniel Lecointre

À propos des auteurs

Jean-Armand Calgaro est polytechnicien et ingénieur des Ponts et Chaussées. Il est expert en conception et construction de ponts et, plus généralement, pour les questions techniques relatives aux ouvrages de génie civil. Il a été professeur de Résistance des Matériaux et de calcul et conception des ponts, notamment à l'ENPC (École nationale des Ponts et Chaussées) et au CHEC (Centre des hautes études de la construction), ancien président du Comité technique 250 (Eurocodes) du CEN (Comité européen de normalisation) et de la Commission française de coordination des Eurocodes (AFNOR).

Daniel Lecointre est ingénieur des Arts et Métiers et diplômé du CHEC. Il est professeur à l'ENPC et au CHEC. Il est également consultant, spécialiste des structures.

Théorèmes généraux de la résistance des matériaux

4.1 Le théorème de Castigliano

Le théorème de Castigliano est l'un des théorèmes fondamentaux de la résistance des matériaux. Il permet de calculer les déplacements en un point quelconque d'un système élastique linéaire. Son énoncé usuel considère un système élastique linéaire doté de liaisons fixes. Mais on l'étend facilement au cas des systèmes dotés de liaisons élastiques linéaires (voir § 4.1.3).

4.1.1 Énoncé usuel

Étant donné un système élastique linéaire ne possédant que des liaisons fixes, et chargé par un système d'actions extérieures (Q_1, Q_2, \dots, Q_n), la dérivée partielle de son énergie potentielle de déformation par rapport à l'action Q_i est égale au déplacement du point d'application de cette action suivant sa ligne d'action.

Cet énoncé nécessite quelques explications. Tout d'abord, par « déplacement du point d'application de l'action suivant sa ligne d'action » il convient d'entendre la projection du déplacement du point en question suivant le support de l'action.

En second lieu, le terme d'action doit être pris dans son sens le plus général : ce peut être une force, un couple, une pression...

Alors, le déplacement considéré du point d'application est le déplacement sur lequel l'action travaille.

Si l'action Q_i est une force, le déplacement est une translation ; si l'action Q_i est un couple, le déplacement correspondant est une rotation et si l'action considérée est une pression, le déplacement associé est une variation de volume.

4.1.2 Démonstration élémentaire

Considérons (fig. 4.1) un corps élastique linéaire chargé par le système d'actions extérieures ($Q_1, Q_2 \dots Q_n$).

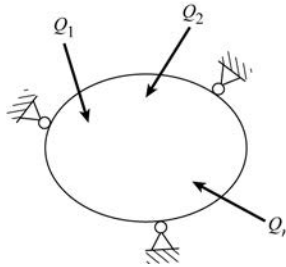


Fig. 4.1. Chargement d'un corps élastique

Les liaisons sont, dans un premier temps, supposées fixes. Sous l'effet de ces actions, le corps se déforme et acquiert une énergie potentielle U , énergie qui est, d'ailleurs, égale au travail réversible des actions extérieures sur les déplacements qu'elles induisent. Donnons alors à l'action Q_i un petit accroissement dQ_i . L'accroissement de l'énergie potentielle du système vaut :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i$$

Maintenant, on décharge complètement le système et on commence par appliquer l'action dQ_i . Le point d'application de cette action subit un déplacement élémentaire $d\delta_i$ et le travail réversible de l'action dQ_i sur ce déplacement vaut $\frac{1}{2} dQ_i d\delta_i$. On applique ensuite le système entier des actions extérieures. Si l'action dQ_i n'existait pas, le système reprendrait son énergie potentielle U . Mais, du fait de la présence de dQ_i , l'énergie varie de la quantité de travail supplémentaire :

$$dQ_i \delta_i$$

de l'action dQ_i sur le déplacement δ_i provoqué par le système ($Q_1, Q_2 \dots Q_n$), ou plutôt sur la projection du déplacement total sur la ligne d'action de dQ_i (ou de Q_i).

En fait, on passe d'un état initial à un état final donné par deux chemins différents. Les énergies potentielles sont donc les mêmes, ce qui permet d'écrire :

$$U + dQ_i \delta_i + \frac{1}{2} dQ_i d\delta_i = U + \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i$$

Or, le terme $\frac{1}{2} dQ_i d\delta_i$ est un infiniment petit du second ordre par rapport aux autres. Il est donc loisible de le négliger. Le théorème de Castigliano en découle donc :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}$$

Cette démonstration suppose que le corps est à comportement élastique linéaire. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le travail des forces extérieures serait différent selon l'ordre de chargement par rapport à dQ_i .

4.1.3 Extension du théorème de Castigliano aux systèmes dotés d'appuis élastiques

La précédente démonstration a été établie, pour des raisons de simplicité, en supposant que le système ne possédait que des liaisons fixes. En fait, elle reste valable en tout point si le système possède des liaisons élastiques linéaires. Dans ce cas, il suffit de considérer non pas le système sans ses appuis, mais l'ensemble du système incluant les appuis élastiques car ce qui a été établi au § 4.1.1 n'impose aucune restriction sur la forme ou la nature du système pourvu que son comportement soit élastique linéaire.

Bien entendu, dans l'expression de l'énergie potentielle U , il convient de tenir compte de l'énergie de déformation des liaisons élastiques. On suppose que ces liaisons sont au nombre de m . Pour la liaison n° α il existe donc une relation linéaire entre la réaction de liaison R_α et la projection du déplacement, notée x_α , sur la ligne d'action de R_α :

$$x_\alpha = -\lambda_\alpha R_\alpha \quad \text{avec} \quad \lambda_\alpha > 0$$

En distinguant l'énergie potentielle de déformation propre du système de l'énergie de déformation des liaisons élastiques, on écrit :

$$U = U_{def} + \frac{1}{2} \sum_1^m \lambda_\alpha \cdot R_\alpha^2$$

Pour l'application du théorème de Castigliano, il convient de considérer l'énergie totale U .

La dérivée partielle de U par rapport à une action donnée fournit le déplacement total résultant de la déformation propre du système et du déplacement lié à la souplesse des appuis élastiques.

4.2 Le théorème de Maxwell-Betti

4.2.1 Énoncé

On considère un système élastique linéaire doté de liaisons fixes, susceptible d'être soumis à deux systèmes d'actions indépendants (S_1) et (S_2).

Le travail des actions (S_1) sur les déplacements induits par les actions (S_2) est égal au travail des actions (S_2) sur les déplacements induits par les actions (S_1).

Ce théorème s'étend, sous cette même forme, au cas des systèmes comportant des liaisons élastiques linéaires, de la même façon que pour le théorème de Castigliano.

4.2.2 Démonstration élémentaire

On suppose que le système (S_1) est composé des actions (au sens général du terme) $Q_1, Q_2 \dots Q_n$, appliquées aux points $A_1, A_2 \dots A_n$, et que le système (S_2) est composé des actions $Q'_1, Q'_2 \dots Q'_k$, appliquées aux points $A'_1, A'_2 \dots A'_k$.

On commence par appliquer au système élastique le premier ensemble d'actions. Il se déforme et acquiert une énergie potentielle égale au travail réversible de ces actions sur les déplacements qu'elles induisent :

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_1)$$

en notant $\delta_{A_i}(S_1)$ le déplacement du point A_i dans la direction de Q_i induit par l'application de (S_1) . On applique ensuite l'ensemble des actions (S_2) . Sous l'effet de ces actions, le système élastique subit une nouvelle déformation indépendante de celle induite par (S_1) du fait de son comportement linéaire. L'énergie potentielle totale s'accroît du travail des forces Q'_i sur les déplacements qu'elles induisent :

$$\frac{1}{2} \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_2)$$

en appelant $\delta_{A'_i}(S_2)$ lesdits déplacements. Mais, en appliquant (S_2) , on provoque de nouveaux déplacements au droit des points A_i , de sorte que les actions Q_i travaillent sur les déplacements induits aux points A_i par les actions (S_2) . L'énergie de déformation correspondante est donc :

$$\frac{1}{2} \sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_2)$$

Au total, lors du passage de l'état initial à l'état final, le système élastique acquiert une énergie totale égale à :

$$\frac{1}{2} \sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_1) + \frac{1}{2} \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_2) + \sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_2)$$

Si l'on applique maintenant les actions au système dans l'ordre inverse du précédent, on voit que l'énergie potentielle mise en jeu est de la forme :

$$\frac{1}{2} \sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_1) + \frac{1}{2} \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_2) + \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_1)$$

Puisque l'on part d'un même état initial pour aboutir à un même état final, les deux expressions de l'énergie totale sont identiques, de sorte que :

$$\sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_2) = \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_1)$$

ce qui démontre le théorème de Maxwell-Betti.

4.3 Application du théorème de Castigliano au calcul des déplacements dans les structures composées de poutres

4.3.1 Énergie potentielle de déformation d'une poutre

Il résulte de l'étude des contraintes effectuée au chapitre 3 que l'énergie potentielle de déformation d'une poutre par unité de longueur a pour expression :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N^2}{2ES} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T^2}{2GK} + \frac{V_y^2}{2GS_{1y}} + \frac{V_z^2}{2GS_{1z}}$$

Tous les termes de cette expression ne sont pas équivalents. Tout d'abord, les poutres faisant partie de structures parfaitement articulées ne travaillent qu'à l'effort normal. L'énergie potentielle de la structure se calcule donc uniquement à partir des termes de la forme $\frac{N^2}{2ES}$.

Lorsque les poutres travaillent en flexion et/ou en torsion, les déformations d'effort normal et d'effort tranchant sont généralement négligeables devant les déformations de flexion et/ou de torsion. Pour de telles poutres, on ne calcule donc, en général, leur énergie potentielle qu'à partir des termes :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T^2}{2GK}$$

Toutefois, dire que l'énergie de déformation due à l'effort normal et à l'effort tranchant est négligeable ne veut pas dire que ces efforts internes n'existent pas dans les poutres.

4.3.2 Calcul des déplacements dans une structure à poutres dotée de liaisons invariables

Compte tenu de ce qui vient d'être établi, l'énergie potentielle d'un système composé de poutres a pour expression :

– s'il s'agit d'un système à poutres articulées :

$$W = \sum \int \frac{N^2}{2ES} dx$$

– s'il s'agit d'un système de poutres travaillant en flexion et/ou en torsion :

$$W = \sum \int \left(\frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T^2}{2GK} \right) dx \text{ (ou } ds)$$

Les efforts internes sont, dans la majorité des situations pratiques, des fonctions linéaires des actions appliquées à la structure. Si cette structure est dotée d'appuis élastiques, il faut ajouter à W le terme correspondant à l'énergie acquise par ces appuis :

$$\frac{1}{2} \sum_1^m \lambda_\alpha R_\alpha^2$$

Dans les expressions de W , le symbole \int représente la sommation (intégrale) le long d'une poutre, et le symbole \sum représente la sommation portant sur l'ensemble de toutes les poutres.

Si l'on veut calculer le déplacement en un point de la structure où est appliquée une action Q , et suivant la ligne d'action de Q , il suffit d'appliquer directement le théorème de Castigliano en dérivant partiellement W (et son terme complémentaire s'il y a lieu) par rapport à Q .

Si l'on veut calculer le déplacement en un point de la structure où aucune action n'est appliquée, et dans une direction donnée, on introduit un facteur sollicitant fictif Φ au point désiré et dans la direction voulue. On peut alors écrire en toute section de toutes les poutres :

$$N = N(Q + \Phi) = N(Q) + N(\Phi)$$

$$M = M(Q + \Phi) = M(Q) + M(\Phi)$$

$$T = T(Q + \Phi) = T(Q) + T(\Phi)$$

Dans ces expressions, on représente symboliquement par Q l'ensemble des actions extérieures données. M représente le moment fléchissant de façon globale ($M = M_y$ ou M_z) de façon à simplifier les écritures.

Comme le matériau constitutif des poutres a un comportement supposé linéaire, on peut également écrire :

$$N(\Phi) = \Phi \cdot n \quad M(\Phi) = \Phi \cdot m \quad T(\Phi) = \Phi \cdot t$$

n , m et t s'interprètent comme étant l'effort normal, le moment fléchissant et le moment de torsion provoqués, dans la structure, par un facteur sollicitant $\Phi = 1$ dans la direction souhaitée. On considère, pour simplifier, une structure à barres articulées dépourvue d'appuis élastiques. On peut donc écrire :

$$W = W(Q + \Phi) = \sum \int \frac{[N(Q) + \Phi n]^2}{2ES} dx$$

Pour calculer le déplacement au droit du point d'application du facteur Φ selon sa ligne d'action, on applique directement le théorème de Castigliano, ce qui donne :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial \Phi} = \sum \int \frac{n[N(Q) + \Phi n]}{ES} dx$$

Mais le facteur Φ est un facteur sollicitant fictif, il suffit de faire $\Phi = 0$, et l'on obtient le résultat recherché :

$$\delta = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right\}_{\Phi=0} = \sum \int \frac{nN(Q)}{ES} dx$$

Dans le cas d'une structure dont les poutres travaillent en flexion/torsion, on obtient un résultat analogue :

$$\delta = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right\}_{\Phi=0} = \sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx + \int \frac{tT(Q)}{GK} dx$$

En résumé, pour calculer le déplacement en un point d'une structure suivant une direction donnée, la structure étant sollicitée par un ensemble d'actions extérieures (Q), on applique en ce point, et suivant la direction voulue, un facteur sollicitant unité. En l'absence de tout

autre chargement, ce facteur sollicitant induit dans la structure des sollicitations (n, m, t). Le déplacement cherché est obtenu par la formule généralisée suivante :

$$\delta = \sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx + \sum \int \frac{tT(Q)}{GK} dx + \sum \int \frac{nN(Q)}{ES} dx$$

REMARQUE

Si la structure comporte des poutres courbes, les intégrales portent sur la fibre moyenne de ces poutres. L'élément différentiel dx doit être remplacé par l'élément différentiel ds (s étant l'abscisse curviligne).

4.3.3 Cas des structures composées de poutres avec appuis élastiques

Lorsque la structure étudiée comporte des appuis élastiques, le raisonnement développé au paragraphe précédent s'étend facilement. En effet, la réaction d'appui R_α de l'appui n° α , lorsque la structure est soumise aux actions extérieures (Q) et à l'action fictive Φ , peut s'écrire :

$$R_\alpha = R_\alpha(Q) + R_\alpha(\Phi) = R_\alpha(Q) + \phi r_\alpha$$

en notant r_α la réaction de l'appui n° α sous l'effet de $\phi = 1$.

Le terme d'énergie complémentaire a pour expression :

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} [R_{\alpha}(Q) + \phi r_{\alpha}]^2$$

Si on le dérive par rapport à ϕ et si l'on fait $\phi = 0$ ensuite, on constate qu'il faut ajouter, à l'expression précédemment établie du déplacement, le terme :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} R_{\alpha}(Q) r_{\alpha}$$

L'expression généralisée du déplacement est donc :

$$\delta = \sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx + \sum \int \frac{tT(Q)}{GK} dx + \sum \int \frac{nN(Q)}{ES} dx + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} R_{\alpha}(Q) r_{\alpha}$$

4.3.4 Calcul pratique des intégrales de Mohr

Les intégrales de type $\sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx$ sont appelées *intégrales de Mohr*. Lorsque de telles intégrales portent sur des poutres droites d'inertie constante (ou, plus généralement, de caractéristiques constantes), elles peuvent, dans les cas simples, être calculées par une méthode « géométrique » expliquée ci-après. On considère l'intégrale :

$$J = \int_0^L f(x) \cdot g(x) dx$$

où l'une au moins des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est linéaire. On suppose, pour fixer les idées, que :

$$f(x) = ax + b$$

Alors,

$$J = a \int_0^L x \cdot g(x) dx + b \cdot \int_0^L g(x) dx$$

On trace (fig. 4.2) les courbes représentatives des fonctions $f(x)$ et $g(x)$. On suppose que sur l'intervalle $(0, L)$ la fonction $g(x)$ reste de signe constant.

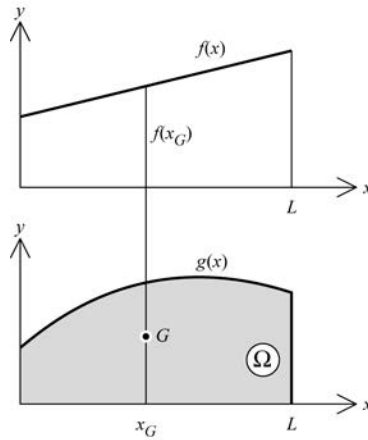


Fig. 4.2. Calcul des intégrales de Mohr

Le terme $\int_0^L g(x) dx$ représente l'aire Ω délimitée par la courbe $g(x)$ avec l'axe Ox sur $(0, L)$. Cette aire est positive si la fonction $g(x)$ est positive, négative dans le cas contraire.

Le terme $\int_0^L x \cdot g(x) dx$ est le moment statique de cette aire Ω , par rapport à l'axe Oy . Il est de même signe que Ω . On appelle x_G l'abscisse du centre de gravité de Ω . On peut écrire :

$$\int_0^L x \cdot g(x) dx = \Omega \cdot x_G$$

Ainsi, l'intégrale J vaut :

$$J = \Omega(ax_G + b) = \Omega f(x_G)$$

Cette formule fournit une méthode de calcul pratique et rapide des intégrales du type J , et donc de certaines intégrales de Mohr. Pour cela, il est utile de connaître l'aire et la position du centre de gravité de certaines figures. Les formules présentées sur la figure 4.3 permettent de calculer certaines intégrales de Mohr dans les cas les plus courants.

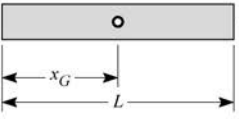
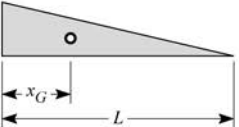
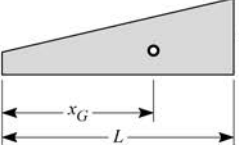
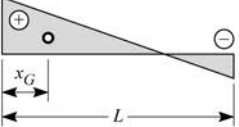
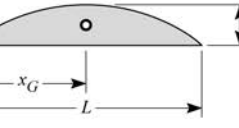
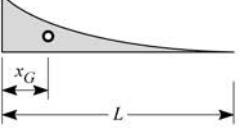
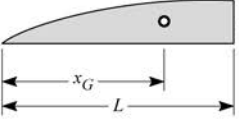
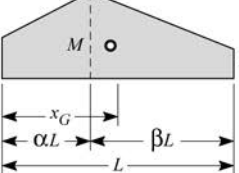
| | |
|---|--|
|  | <p>Diagramme rectangulaire</p> $S = ML \quad x_G = \frac{1}{2} L$ |
|  | <p>Diagramme triangulaire</p> $S = \frac{1}{2} ML \quad x_G = \frac{1}{3} L$ |
|  | <p>Diagramme trapézoïdal</p> $S = \frac{1}{2} L(M_g + M_d) \quad x_G = \frac{1}{3} L \frac{2M_d + M_g}{M_d + M_g}$ |
|  | <p>Diagramme trapézoïdal</p> $S = \frac{1}{2} L(M_g - M_d) \quad x_G = \frac{1}{3} L \frac{M_g - 2M_d}{M_g - M_d}$ |
|  | <p>Diagramme parabolique</p> $S = \frac{2}{3} ML \quad x_G = \frac{1}{2} L$ |
|  | <p>Diagramme semi-parabolique</p> $S = \frac{1}{3} ML \quad x_G = \frac{1}{4} L$ |
|  | <p>Diagramme semi-parabolique</p> $S = \frac{2}{3} ML \quad x_G = \frac{5}{8} L$ |
|  | <p>Diagramme trapézoïdal</p> <p>M, M_g, M_d en valeur algébrique</p> $S = \frac{1}{2} L(\alpha M_g + M + \beta M_d)$ $x_G = \frac{1}{3} L \frac{\alpha^2 M_g + (1 + \alpha) M + \beta(3 - \beta) M_d}{\alpha M_g + M + \beta M_d}$ |

Fig. 4.3. Calcul d'intégrales de Mohr

Calcul des structures par la méthode des forces

9.1 Analyse statique des structures

9.1.1 Les appuis (ou liaisons)

Une structure est rendue immobile par rapport à un système géométriquement invariable par l'intermédiaire de liaisons. Les réactions engendrées par ces liaisons forment, avec les charges agissant sur la structure, un système d'actions en équilibre.

Étant donné une structure, la première étape de son analyse statique consiste à recenser le nombre de composantes de réactions d'appui. En d'autres termes, il convient, pour chaque appui, de déterminer le nombre de ses degrés de liberté en examinant les déplacements (translations et rotations) empêchés ou gênés.

Dans les *structures planes* chargées dans leur plan, les types d'appuis les plus courants sont (fig. 9.1) :

- *L'articulation à rouleaux* empêche le déplacement suivant une direction perpendiculaire au plan de roulement : il lui correspond donc une seule composante de réaction.
- *L'articulation fixe* empêche le déplacement dans deux directions perpendiculaires : il lui correspond ainsi deux composantes de réaction.
- *L'encastrement parfait* bloque non seulement les deux translations mais également la rotation de la poutre : il lui correspond trois composantes de réaction (deux forces et un moment).

Dans les *structures spatiales*, les types de liaison sont plus variés puisqu'on peut aller de l'articulation sphérique, correspondant à une seule composante de réaction, à l'encastrement parfait multidirectionnel, correspondant à six composantes de réaction (trois forces et trois moments). Dans les cas particuliers, il convient de déterminer le nombre de degrés de liberté pour obtenir le nombre de composantes de liaison inconnues.

Certains appuis réels sont modélisés de façon un peu plus sophistiquée : ce sont les *appuis élastiques*. Du point de vue de l'analyse statique des structures, il convient de dénombrer

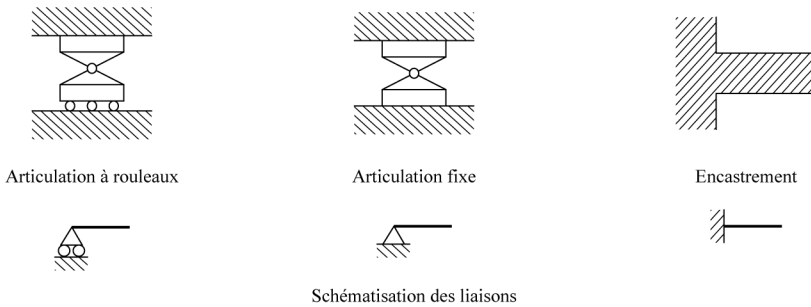


Fig. 9.1 Types de liaisons courantes

leurs degrés de liberté comme si les liaisons étaient invariables. Cela revient au même que d'introduire, au droit de chaque liaison élastique, un déplacement inconnu et d'ajouter au système résolvant une équation supplémentaire liant le déplacement inconnu à la réaction correspondante.

Par exemple, le degré d'hyperstaticité de la poutre représentée sur la figure 9.2 est égal à 1. On peut considérer qu'il y a deux inconnues : la flèche (z_B) et la réaction en B (R_B), mais ces deux grandeurs sont liées par une relation du type :

$$z_B = -\lambda R_B \quad \text{ou} \quad R_B = -kz_B$$

les signes « moins » résultant du fait que les deux grandeurs sont comptées avec la même convention de signe et qu'elles sont de sens opposé.

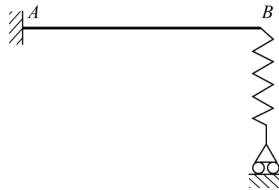


Fig. 9.2. Poutre avec un appui élastique

9.1.2 Définitions

On dit qu'une structure est *statiquement déterminée*, ou *isostatique*, si elle est invariable et si le calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appui peut s'effectuer à l'aide des seules équations de la statique.

Si le nombre des équations indépendantes de la statique que l'on peut écrire est supérieur au nombre total des inconnues (internes et de liaison) du système, ce dernier est dit *hypostatique* ou *cinématiquement variable* : il est instable.

À l'inverse, si le nombre des équations indépendantes de la statique est inférieur au nombre des inconnues du système, et si ce dernier est invariable, il est dit *hyperstatique*.

L'hyperstaticité d'un système peut être intérieure ou extérieure, ou encore les deux à la fois. Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre de liaisons externes ou internes qu'il faudrait

éliminer pour le convertir en un système isostatique invariable, c'est-à-dire un système qui ne peut changer de configuration sans déformation de ses éléments.

En général, on calcule le *degré d'hyperstaticité* d'une structure en décomptant successivement le nombre de liaisons extérieures et de liaisons intérieures surabondantes. Le degré d'hyperstaticité extérieure concerne les composantes de réactions d'appui. Pour un système plan chargé dans son plan, les équations de la statique sont au nombre de trois : deux équations d'équilibre en forces et une équation d'équilibre en moment. Dans l'espace, les équations indépendantes de la statique sont au nombre de six : trois équations d'équilibre en forces et trois équations d'équilibre en moments (projections suivant les trois axes du repère). Ainsi, le degré d'hyperstaticité extérieure d'un système est égal au nombre de ses composantes de réactions d'appui diminué de 3 ou de 6 selon que le problème est plan ou spatial.

À noter que, dans certains cas, les conditions de symétrie de la structure et de son chargement éliminent automatiquement certaines composantes de réaction et peuvent conduire à un degré d'hyperstaticité apparent plus faible que le degré d'hyperstaticité réel.

Certains systèmes peuvent sembler invariables alors qu'il n'en est rien. Un exemple simple est représenté sur la figure 9.3 : il est constitué par un système plan invariable prenant appui sur trois barres (ou plus) articulées et rigides, disposées de telle sorte que leurs axes concourent en un même point.

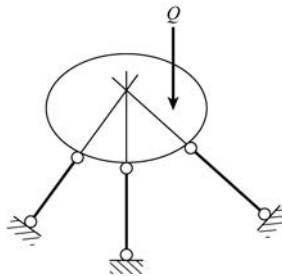


Fig. 9.3. Exemple de système instable

On voit facilement que si le système est soumis, par exemple, à une force Q dont la ligne d'action ne passe pas par le point de concours des axes des barres d'appui, le moment de cette force ne peut être équilibré. Le système est instantanément variable : sous l'effet de charges, mêmes très faibles, il subit une rotation autour du point considéré, qui est donc *centre instantané de rotation*. De cet exemple simple, on tire la conclusion importante qu'un système plan chargé dans son plan ne peut être géométriquement stable que s'il prend appui sur au moins trois barres dont les axes ne sont ni concourants ni parallèles (ce qui reviendrait à dire qu'ils sont concourants à l'infini).

9.1.3 Analyse des structures planes à barres articulées

On considère, dans ce paragraphe, des structures planes composées de barres biarticulées et chargées dans leur plan. Dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'aux effets d'actions extérieures (le poids propre des barres étant, ici, négligé), les barres ne sont donc soumises qu'à des sollicitations d'effort normal (traction ou compression).

9.1.3.1 Structure de base

On considère une structure élémentaire constituée par deux barres articulées entre elles et situées dans le prolongement l'une de l'autre (fig. 9.4 a). Il est clair que si les barres AC et BC étaient disjointes en C, leur extrémité libre décrirait deux cercles de centres respectifs A et B. Ces cercles sont tangents en C. Il s'ensuit que, sous l'effet d'une charge extérieure quelconque, l'extrémité C de la barre AC tendrait à se déplacer d'une petite longueur suivant la tangente au cercle de centre A et la barre BC ne pourrait s'opposer efficacement à ce déplacement.

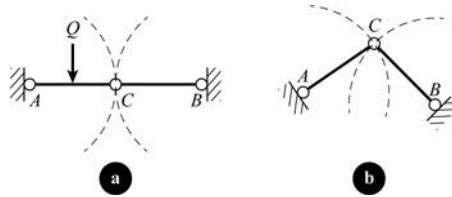


Fig. 9.4. Disposition de deux barres biarticulées

On constate donc que ce système est instantanément variable : de très faibles charges peuvent engendrer des efforts considérables dans les barres (la résolution analytique de ce problème, en supposant que les barres ne travaillent qu'à l'effort normal, débouche sur un système sans solution).

La situation est totalement différente si les deux barres ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre (fig. 9.4 b). Les cercles de centres A et B n'ont pas de tangente commune, ce qui rend impossible tout déplacement du premier ordre de C.

En conclusion, étant donné un système invariable à barres articulées, on obtient un nouveau système invariable en lui ajoutant deux barres articulées entre elles et non alignées.

9.1.3.2 Degré d'hyperstaticité d'une structure plane à barres articulées

On considère maintenant une structure plane à barres articulées (les articulations étant supposées parfaites) dont les appuis ne sont constitués que par des articulations fixes ou à rouleaux (ou éventuellement des appuis simples élastiques).

Soit B le nombre de barres dans la structure et r le nombre de réactions de liaison. Il est clair que $(B + r)$ représente le nombre total des inconnues du problème. Pour le résoudre, on peut écrire $2N$ équations d'équilibre correspondant aux N nœuds de la structure (deux équations de projection en forces par nœud). Si le système est invariable, son degré d'hyperstaticité est égal à :

$$n = B + r - 2N$$

En fait, parmi les $2N$ équations d'équilibre, on peut en remplacer trois par les trois équations d'équilibre global de la structure. La précédente formule peut donc s'écrire :

$$n = B + r - (2N - 3) - 3 = (r - 3) + (B - 2N + 3)$$

Sous cette forme, on fait apparaître le degré d'hyperstaticité extérieure ($r - 3$) et le degré d'hyperstaticité intérieure ($B - 2N + 3$).

Si $B < 2N - 3$, la structure est hypostatique intérieurement (condition nécessaire et suffisante).

Si $B = 2N - 3$, cette égalité fournit une condition nécessaire d'isostaticité intérieure de la structure. Ce n'est pas une condition suffisante car elle pourrait être vérifiée pour des structures comportant des parties possédant un nombre de barres surabondant et des parties géométriquement variables.

De même, la relation $B > 2N - 3$ n'est qu'une condition nécessaire d'hyperstaticité intérieure. La figure 9.5 donne un exemple de structure instable vérifiant la précédente inégalité.

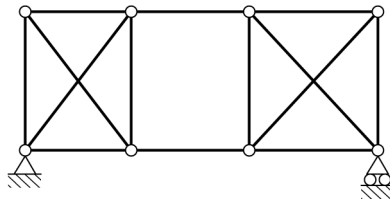


Fig. 9.5. Exemple de structure instable

9.1.4 Analyse des structures spatiales à barres articulées

On considère maintenant des structures spatiales composées de barres liées les unes aux autres à l'aide d'articulations parfaites. En général, de telles structures sont liées au sol par l'intermédiaire d'articulations sphériques (1 composante de réaction), à rouleaux (2 composantes de réaction) ou fixes (3 composantes de réaction).

9.1.4.1 Structure de base

La structure de base invariable est constituée de trois barres situées dans un même plan et articulées entre elles. Soit ABC une telle structure. Ainsi, pour obtenir une structure spatiale invariable, on part d'un triangle articulé (fig. 9.6).

Supposons que l'on veuille ajouter un nouveau nœud, D, à cette structure. Si on ne lie le nœud D qu'aux nœuds A et B par l'intermédiaire de deux nouvelles barres articulées, on voit facilement (fig. 9.6 a) que D peut tourner autour de l'axe AB. Pour assurer l'invariabilité géométrique de la structure, il faut donc ajouter une barre supplémentaire liant D à C. Mais si le point D est situé dans le plan du triangle ABC, il peut subir un petit déplacement suivant une direction perpendiculaire à ce plan (fig. 9.6 b).

La structure invariable de base est donc, dans l'espace, un tétraèdre non aplati. De plus, comme dans le cas des structures planes, on obtient, à partir d'une structure invariable donnée, une nouvelle structure invariable en ajoutant un nœud lié à la précédente par trois barres non coplanaires.

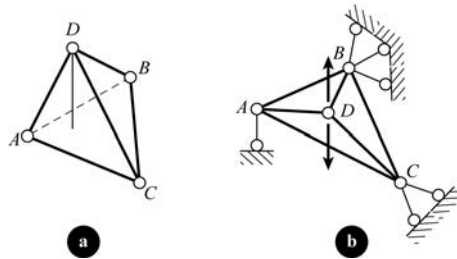


Fig. 9.6. Structure spatiale de base

9.1.4.2 Degré d'hyperstaticité d'une structure spatiale à barres articulées

On considère une structure spatiale comportant B barres et dont les appuis conduisent à r composantes de réactions. Le nombre total des inconnues à déterminer est égal à $B + r$. Si la structure comporte N nœuds, on peut écrire trois équations d'équilibre par nœud (trois équations d'équilibre en forces suivant trois axes). Le degré total d'hyperstaticité de la structure est donc égal à :

$$n = B + r - 3N$$

Comme dans le cas des structures planes, on peut remplacer six équations d'équilibre de nœuds par les six équations d'équilibre global de la structure. Ainsi, on peut écrire :

$$n = B + r - 6 - (3N - 6) = (r - 6) + (B - 3N + 6)$$

Cette forme permet de mettre en évidence le degré d'hyperstaticité extérieure et le degré d'hyperstaticité intérieure.

Si $B < 3N - 6$, la structure est intérieurement hypostatique : elle n'est stable que si les liaisons extérieures sont en nombre suffisant pour compenser les liaisons intérieures manquantes.

Si $B = 3N - 6$, ceci constitue une condition nécessaire d'isostaticité interne de la structure ; elle n'est pas suffisante.

De même, si $B > 3N - 6$, cette inégalité constitue une condition nécessaire d'hyperstaticité interne de la structure.

Pour reconnaître facilement si une structure spatiale est isostatique intérieurement, il convient de voir si elle peut être considérée comme résultant de l'assemblage de tétraèdres.

9.1.5 Remarque générale

On a vu que tout système obtenu en partant d'un triangle articulé par addition successive de nœuds au moyen de deux barres non alignées dans le cas des structures planes, ou en partant d'un tétraèdre articulé par addition successive de nœuds au moyen de trois barres non coplanaires dans le cas des structures spatiales, est géométriquement invariable et intérieurement isostatique.

De tels systèmes, facilement calculables par la méthode des équilibres des nœuds, sont appelés *systèmes simples*. On peut obtenir un système dit *compliqué* soit en partant d'un système simple et en remplaçant certaines barres par d'autres, soit par superposition de systèmes simples. La vérification (et le calcul) de l'invariabilité géométrique d'un système compliqué est beaucoup plus délicate. À titre d'exemple, la figure 9.7 montre une structure à barres articulées de forme hexagonale, extérieurement isostatique, et qui n'est intérieurement isostatique que si les angles α et β sont différents. Lorsque $\beta = \alpha$, la structure est intérieurement hypostatique. Mais ceci ne peut être établi que par le calcul.

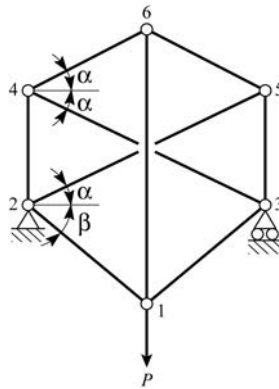


Fig. 9.7. Structure hexagonale

9.1.6 Analyse des structures à nœuds rigides

L'analyse statique des structures à nœuds rigides s'effectue de la même façon que pour les structures à barres articulées : on calcule d'abord le nombre de composantes de réactions inconnues puis on détermine le degré d'hyperstaticité interne éventuelle.

Dans le cas des *structures planes*, il faut se souvenir que :

- Tout contour fermé présente une hyperstaticité intérieure de degré 3 : en effet, pour le rendre isostatique, il faut le sectionner, ce qui libère trois liaisons internes (effort normal, effort tranchant et moment fléchissant).
- Le remplacement d'un nœud rigide formé par la rencontre de deux barres à l'aide d'une articulation parfaite plane, ou l'introduction d'une articulation dans l'une des barres d'un système statiquement déterminé élimine une liaison et abaisse le degré d'hyperstaticité d'une unité.
- Plus généralement, si n barres aboutissent en un même nœud et si elles sont articulées entre elles (articulation plane), cela revient au même de considérer que $(n - 1)$ barres sont fixées à l'extrémité de la n -ième par l'intermédiaire d'articulations planes parfaites. Ainsi, l'introduction d'une articulation au droit d'un nœud rigide où sont liées n barres entre elles abaisse le degré d'hyperstaticité du système de $(n - 1)$. En d'autres termes, la nullité du moment à l'extrémité de $(n - 1)$ barres entraîne automatiquement la nullité du moment à l'extrémité de la n -ième, du fait de la condition d'équilibre global du nœud.

Dans le cas des *structures spatiales*, un contour fermé présente une hyperstaticité interne de degré 6 ; si on le sectionne, on libère trois composantes de forces et trois composantes de

moment. L'abaissement du degré d'hyperstaticité par l'introduction d'articulations doit être examiné avec soin dans chaque cas particulier selon le nombre de degrés de liberté effectifs libérés par ces articulations (distinction entre articulations cylindriques planes et articulations sphériques).

Dans les cas usuels, on peut déterminer le degré d'hyperstaticité d'une structure à nœuds rigides en supprimant progressivement les liaisons surabondantes : liaisons extérieures relatives aux appuis et liaisons internes par l'intermédiaire de coupures ou par l'introduction d'articulations.

En général, pour un système donné, il existe de nombreuses façons de le rendre isostatique. Il convient, bien évidemment, de veiller à ce que les suppressions de liaisons ne mettent pas en cause son invariabilité géométrique. La figure 9.8 donne quelques exemples de structures hyperstatiques dont on a calculé le degré d'indétermination statique total (DIST) ou degré d'hyperstaticité ($d^{\circ}h$).

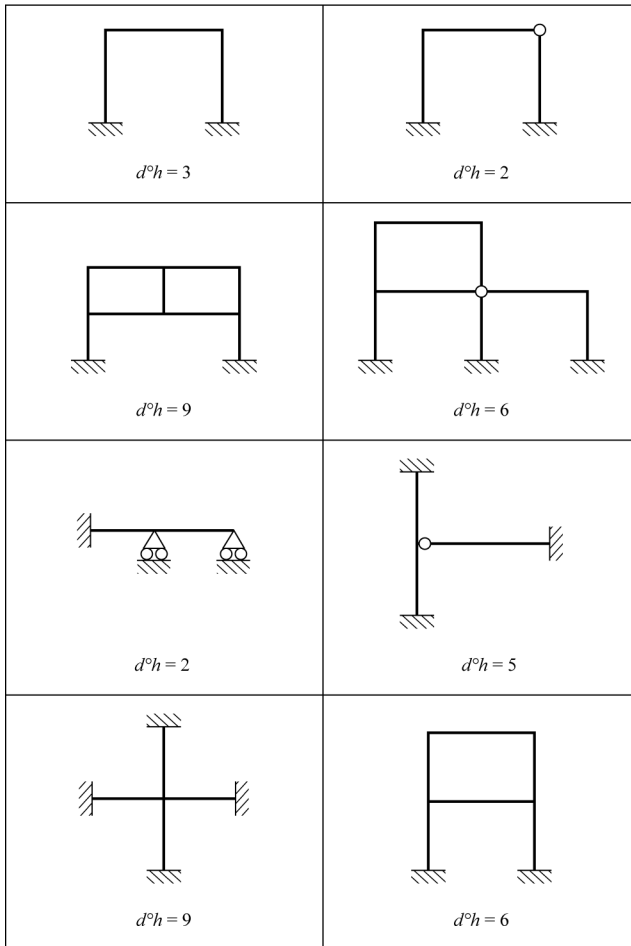


Fig. 9.8. Exemples de structures hyperstatiques

9.2 Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des forces

9.2.1 Principe de la méthode

Dans la mesure où les équations de la statique ne permettent pas de calculer les efforts et leurs effets dans les structures hyperstatiques, on commence par les rendre isostatiques en supprimant autant de liaisons (externes et internes) que nécessaire.

Sous l'effet des charges appliquées, une structure rendue isostatique se déforme et des déplacements se produisent, en particulier, là où des liaisons ont été supprimées : *déplacements absolus* au droit des liaisons externes supprimées, *déplacements relatifs* au droit des liaisons internes supprimées (fig. 9.9). Elle peut être également déformée par des déplacements imposés de certaines de ses liaisons.

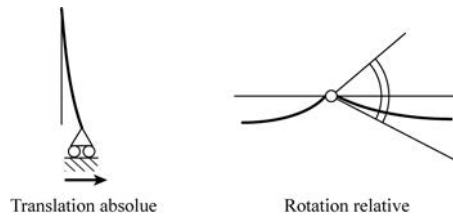


Fig. 9.9. Exemples de déformations (systèmes isostatiques)

Or, dans la structure hyperstatique initiale, ces déplacements sont nuls ou imposés. La procédure de résolution consiste à appliquer des efforts (forces ou couples) ou des systèmes d'efforts réciproques, qui constituent les inconnues du problème, au droit des points où les liaisons ont été supprimées et à calculer ces efforts de manière qu'ils annulent ou rendent égaux aux valeurs imposées les déplacements en question.

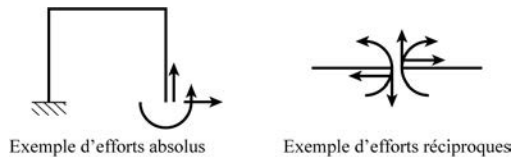


Fig. 9.10. Exemples d'efforts au droit de liaisons supprimées

Le principe du calcul en découle. Étant donné une structure hyperstatique, on la rend isostatique par suppression de liaisons et on applique des efforts ou des systèmes d'efforts réciproques au droit des liaisons supprimées. On calcule ensuite l'énergie potentielle de déformation élastique dans la structure rendue isostatique en fonction des charges appliquées et des efforts inconnus introduits.

À l'aide du théorème de Castigliano, on exprime que les *déplacements* (absolus ou relatifs) au droit des liaisons supprimées sont *nuls* ou *imposés*.

9.2.2 Choix du système isostatique de référence

Comme précédemment évoqué, la première phase du calcul d'une structure hyperstatique consiste à la rendre isostatique en supprimant un nombre approprié de liaisons externes ou internes. On obtient alors ce qu'on appelle le *système isostatique de référence*.

Si le degré d'hyperstaticité de la structure initiale est n , il convient donc de supprimer n liaisons surabondantes, en veillant à ne pas la transformer en mécanisme. Au droit des liaisons extérieures supprimées, on introduit les *composantes (inconnues) des réactions de liaison*. Au droit des liaisons internes supprimées, on introduit des *sollicitations réciproques*.

Dans les cas pratiques, il y a tout intérêt à utiliser au maximum les propriétés de symétrie de la structure, en décomposant éventuellement le chargement donné en la somme d'un chargement symétrique et d'un chargement antisymétrique. Il est facile de voir que dans une structure symétrique, rendue isostatique en respectant cette symétrie, et sollicitée par un chargement symétrique, les facteurs sollicitants antisymétriques sont nuls. De même, si le chargement est antisymétrique, ce sont les facteurs sollicitants symétriques qui seront nuls.

Il faut rappeler que dans une structure spatiale quelconque, l'effort normal et les deux moments de flexion sont des facteurs sollicitants symétriques tandis que le couple longitudinal et les deux efforts tranchants sont des facteurs sollicitants antisymétriques.

Lorsque la structure donnée comporte des appuis élastiques, il ne faut évidemment pas la rendre isostatique en supprimant purement et simplement ces appuis : l'expression de l'énergie potentielle interne deviendrait fautive. On peut pratiquer une suppression de liaison entre la structure et l'appui élastique (c'est alors une suppression de liaison interne) ou entre l'appui élastique et le « sol » (il s'agit alors d'une suppression de liaison externe). Ceci est illustré schématiquement sur la figure 9.11.

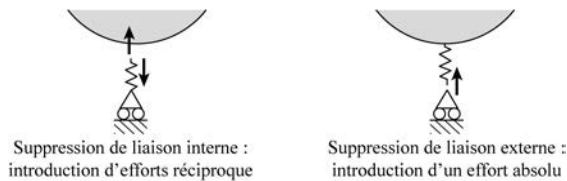


Fig. 9.11. Suppression de liaisons élastiques

Enfin, lorsqu'une structure symétrique comporte un grand nombre de barres, il n'est généralement pas possible de la rendre isostatique de façon que les épures des sollicitations dues aux facteurs inconnus soient symétriques ou antisymétriques. On peut grouper les inconnues pour retrouver ces propriétés géométriques. Les déplacements calculés sont alors ceux engendrés par les groupes de facteurs sollicitants.

9.2.3 Équations canoniques de la méthode des forces pour les systèmes (articulés ou à nœuds rigides) en l'absence de variations linéaires des éléments

On considère une structure n fois hyperstatique. On lui associe un système isostatique de référence et on introduit n facteurs sollicitants inconnus, notés X_1, X_2, \dots, X_n . La structure peut comporter, ou non, des appuis élastiques.

Le déplacement Δ_i relatif à la liaison supprimée n° i est, *a priori*, une fonction de la charge extérieure donnée, que l'on note globalement Q , et des facteurs sollicitants inconnus :

$$\Delta_i = \Delta_i(X_1, X_2, \dots, X_n, Q)$$

On rappelle que Δ_i est un déplacement mesuré suivant une direction bien déterminée (celle associée à la liaison supprimée) et c'est également la direction du facteur sollicitant X_i .

Les poutres étant confectionnées dans un matériau à comportement supposé élastique linéaire, Δ_i est une fonction linéaire des facteurs sollicitants et de la charge Q :

$$\Delta_i = \Delta_i(X_1) + \Delta_i(X_2) + \dots + \Delta_i(X_n) + \Delta_i(Q)$$

$\Delta_i(X_k)$ est le déplacement (absolu ou relatif) au droit de la liaison supprimée n° i , dans la direction du facteur sollicitant X_i , provoqué par le facteur sollicitant X_k . De plus, $\Delta_i(X_k)$ est proportionnel à X_k , ce qui peut se traduire par :

$$\Delta_i(X_k) = \delta_{ik} \cdot X_k$$

δ_{ik} s'interprète ainsi comme étant le déplacement au droit de la liaison supprimée n° i , dans la direction de X_i , provoqué par le facteur sollicitant $X_k = 1$. De même, $\Delta_i(Q)$ est le déplacement suivant la direction de la liaison supprimée n° i dû à la charge extérieure. Selon l'usage, on note ce terme $\delta_{i,iso}$ pour rappeler qu'il est calculé dans la structure isostatique associée à la structure hyperstatique de départ.

En résumé,

$$\Delta_i = \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \delta_{i,iso} \quad (9.1)$$

Il reste à exprimer que les déplacements Δ_i sont nuls ou égaux à des valeurs imposées. S'il n'y a pas de déplacements imposés, les facteurs sollicitants inconnus X_1, X_2, \dots, X_n sont solutions d'un système linéaire de n équations à n inconnues de la forme :

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \delta_{i,iso} = 0 \quad (9.2)$$

ou

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \sum_1^n \delta_{ik}X_k + \delta_{i,iso} = 0$$

La matrice ($n \times n$) des coefficients δ_{ik} de ce système est appelée *matrice de souplesse*. Elle est symétrique :

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Pour le démontrer, on applique le théorème de Maxwell-Betti. En effet, δ_{ik} représente le travail du facteur $X_i = 1$ sur le déplacement induit par $X_k = 1$ au droit de son point d'application. De même, δ_{ki} représente le travail du facteur $X_k = 1$ sur le déplacement induit par $X_i = 1$. L'égalité des deux déplacements découle de la formulation du théorème de Maxwell-Betti.

On appelle (S) la matrice de souplesse de la structure ($S = \delta_{ij}$). On appelle également (X) le vecteur colonne des facteurs sollicitants inconnus et (Δ_{iso}) la matrice colonne des éléments $\delta_{i,iso}$. Le système résolvant s'écrit :

$$(S) \cdot (X) = -(\Delta_{iso}) \quad \text{d'où} \quad (X) = -(S)^{-1} \cdot (\Delta_{iso})$$

En effet, le déterminant de la matrice (S) ne peut pas être nul, sinon cela voudrait dire que tous les déplacements ne sont pas indépendants et que la structure aurait été incorrectement rendue isostatique. Étant symétrique, la matrice (S) est donc inversible.

On a vu au chapitre 4 l'expression générale du déplacement en un point quelconque. Il est donc facile de transposer les formules générales au calcul des coefficients du système :

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dx + \sum \int \frac{t_i t_k}{GK} dx + \sum \int \frac{n_i n_k}{ES} dx + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} r_{\alpha i} r_{\alpha k} \quad (9.3)$$

$$\delta_{i,iso} = \sum \int \frac{m_i M_{iso}}{EI} dx + \sum \int \frac{t_i T_{iso}}{GK} dx + \sum \int \frac{n_i N_{iso}}{ES} dx + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} R_{\alpha,iso} r_{\alpha i}$$

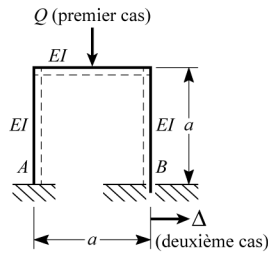
Dans ces expressions, le symbole \sum indique la sommation sur l'ensemble des poutres, le symbole \int indique l'intégrale sur une poutre particulière et le symbole \sum_{α} indique la sommation sur l'ensemble des appuis élastiques éventuels (dont le n° est repéré par la lettre α).

m_i est le moment fléchissant engendré, dans le système isostatique de référence, par le facteur sollicitant $X_i = 1$. De même, t_i et n_i sont respectivement le moment de torsion et l'effort normal engendrés dans ce système par $X_i = 1$. M_{iso} , T_{iso} et N_{iso} sont respectivement le moment fléchissant, le moment de torsion et l'effort normal engendrés dans la structure isostatique associée par la charge extérieure (ou les effets de déplacements imposés). Enfin, $r_{\alpha i}$ est la réaction de l'appui élastique n° α sous l'effet de $X_i = 1$ et $R_{\alpha,iso}$ est la réaction de ce même appui sous l'effet de la charge extérieure, toujours dans le système isostatique de référence.

Les équations canoniques de la méthode des forces qui viennent d'être explicitées se généralisent facilement lorsque la structure donnée est soumise à des déplacements imposés. Il y a seulement lieu de distinguer selon que les déplacements sont imposés dans la direction de liaisons supprimées, auquel cas les dits déplacements se retrouvent au second membre des équations (9.3), ou qu'ils engendrent des déplacements au droit de liaisons supprimées non directement affectées par les déplacements imposés. Dans ce dernier cas, les effets sont introduits dans les termes $\delta_{i,iso}$.

9.2.4 Exemple traité

On peut illustrer quelques aspects précédemment évoqués de la méthode des forces sur un exemple simple. Il s'agit de déterminer l'épure des moments de flexion dans le portique plan représenté sur la figure 9.12 soumis, dans un premier temps, à une charge concentrée Q au milieu de sa traverse supérieure et dans un deuxième temps à un déplacement horizontal Δ de son appui B.

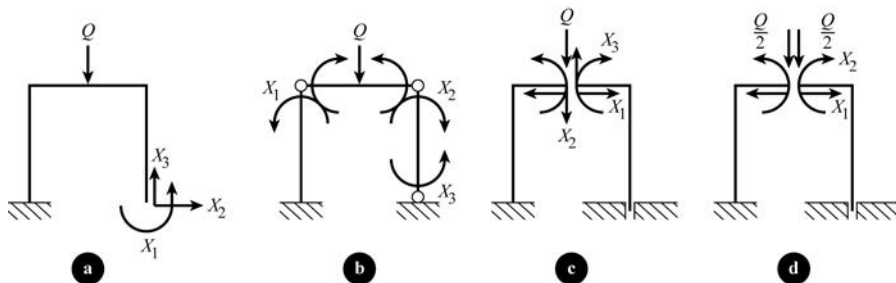

Fig. 9.12. Exemple d'étude

Les trois poutres du portique ont même longueur a , même rigidité de flexion EI . Les liaisons en A et B sont des encastrements parfaits, mais la liaison en B a été représentée de telle manière que l'on puisse imaginer un déplacement de l'appui vers la droite tout en bloquant la rotation du montant. Comme il est d'usage dans ce genre de problème, on néglige les déformations d'effort normal devant celle de flexion. Voici le processus de résolution en suivant les étapes déjà identifiées dans ce chapitre :

1) Degré d'hyperstaticité : il est égal à 3 puisque la structure forme un cadre plan fermé. D'ailleurs, il suffit de constater que l'on obtient une structure isostatique en supprimant l'un des deux appuis, c'est-à-dire en libérant trois degrés de liberté. Toutefois, compte tenu de la symétrie de la structure et de ses modes de sollicitation, la prise en compte de cette symétrie conduit à un degré d'hyperstaticité apparent de 2 : par exemple, l'effort tranchant au milieu de la traverse supérieure est nul, ou les composantes verticales des réactions d'appui sont identiques.

2) Avant de choisir une structure isostatique de référence, il convient de fixer une convention de signe sur les sollicitations afin de conduire les calculs de façon homogène. Il est fréquent de fixer une telle convention de manière « physique », par exemple en convenant de compter positivement le moment fléchissant lorsqu'il tend la fibre intérieure du portique (représentée en pointillés sur la figure 9.12).

3) On s'intéresse d'abord au premier mode de sollicitation (charge Q en milieu de traverse supérieure). Il y a de nombreuses possibilités de choix d'une structure isostatique de référence car il y a de nombreuses façons de supprimer trois liaisons. La figure 9.13 montre quelques possibilités.


Fig. 9.13. Structures isostatiques associées à la structure initiale

Compte tenu de la symétrie de la structure et de son mode de sollicitation, les structures isostatiques a) et b) ne sont pas les plus « astucieuses ». La structure c) est obtenue en sectionnant la traverse supérieure en son milieu, ce qui entraîne l'introduction de trois efforts réciproques ; mais, la charge Q étant placée à gauche (elle aurait très bien pu être placée à droite) de la coupure, la symétrie n'est pas respectée et il est nécessaire d'introduire le terme d'effort tranchant (X_2). La structure d) est la plus judicieuse puisqu'en séparant la charge Q en deux charges infiniment voisines $Q/2$ de part et d'autre de la coupure, on respecte complètement la symétrie géométrique et mécanique du problème.

Toutefois (dans la mesure où les calculs sont justes !), tous les systèmes isostatiques permettent de résoudre le problème. Dans ce qui suit, on détaille les calculs en utilisant les structures isostatiques d) et a).

4) Résolution à l'aide de la structure isostatique d). Les épures donnant les moments unitaires m_1 et m_2 et le moment isostatique sont représentées sur la figure 9.14.

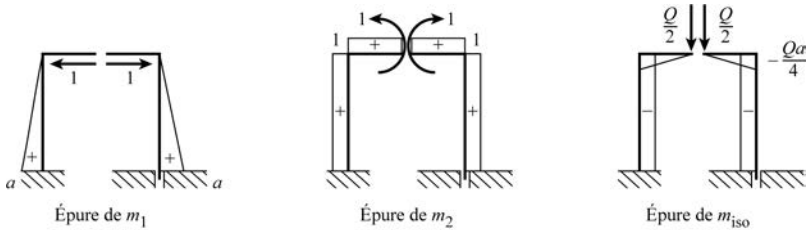


Fig. 9.14. Épures des moments isostatiques

On calcule ensuite les coefficients du système résolvant :

$$EI\delta_{11} = \frac{2}{3}a^3 \quad EI\delta_{22} = 3a \quad EI\delta_{12} = a^2$$

$$EI\delta_{1,iso} = -\frac{1}{4}Qa^3 \quad EI\delta_{2,iso} = -\frac{5}{8}Qa^2$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a^3X_1 + X_2 = \frac{1}{4}Qa \\ aX_1 + 3X_2 = \frac{5}{8}Qa \end{cases} \Rightarrow X_1 = \frac{Q}{8} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{Qa}{6}$$

L'épure finale du moment fléchissant s'établit ainsi :

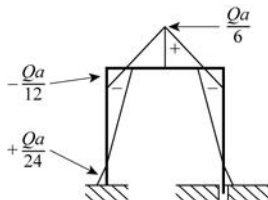


Fig. 9.15. Épure du moment fléchissant dans le portique

5) Résolution du problème à l'aide de la structure isostatique a). Les épreuves des moments sont présentés sur la figure 9.16.

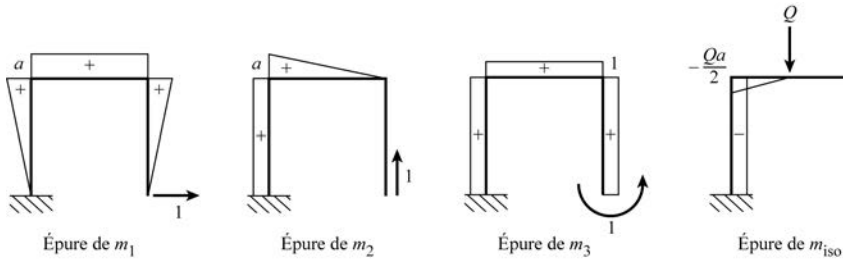


Fig. 9.16. Épreuves des moments de flexion isostatiques

Les coefficients du système résolvant sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 EI\delta_{11} &= \frac{5}{3}a^3 & EI\delta_{22} &= \frac{4}{3}a^3 & EI\delta_{33} &= 3a \\
 EI\delta_{12} &= a^3 & EI\delta_{13} &= 2a^2 & EI\delta_{23} &= \frac{3}{2}a^2 \\
 EI\delta_{1,iso} &= -\frac{3}{8}Qa^3 & EI\delta_{2,iso} &= -\frac{29}{48}Qa^3 & EI\delta_{3,iso} &= -\frac{5}{8}Qa^2
 \end{aligned}$$

D'où le système et sa solution :

$$\begin{cases} \frac{5}{3}aX_1 + aX_2 + 2X_3 = \frac{3}{8}Qa \\ aX_1 + \frac{4}{3}aX_2 + \frac{3}{2}X_3 = \frac{29}{48}Qa \\ 2aX_1 + \frac{3}{2}aX_2 + 3X_3 = \frac{5}{8}Qa \end{cases} \Rightarrow X_1 = -\frac{Q}{8} \quad X_2 = \frac{Q}{2} \quad \text{et} \quad X_3 = \frac{Qa}{24}$$

Si on trace l'épreuve du moment total, on retrouve (heureusement) la même épreuve que celle de la figure 9.15.

6) On considère maintenant le mode de sollicitation correspondant à un déplacement Δ (vers la droite) de l'encastrement B. La méthode de résolution reste la même. Dans la structure isostatique de référence d), ce déplacement induit un écartement des lèvres de la coupure pratiquée au milieu de la traverse supérieure, écartement qui va dans le même sens que les efforts unitaires appliqués à ces mêmes lèvres. Le système résolvant est le même que précédemment, mais avec $\delta_{1,iso} = \Delta$ et $\delta_{2,iso} = 0$, soit :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}aX_1 + X_2 = -\frac{EI\Delta}{a^2} \\ aX_1 + 3X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1 = -\frac{3EI\Delta}{a^3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{EI\Delta}{a^2}$$

En posant $\mu = \frac{EI\Delta}{a^2}$, l'épure des moments de flexion s'établit ainsi :

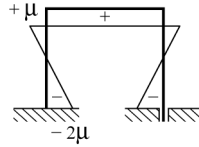


Fig. 9.17. Épure des moments de flexion

En opérant avec la structure isostatique de référence a), le déplacement Δ est maintenant un déplacement imposé dans le sens du facteur sollicitant X_1 . Les trois termes $\delta_{i,iso}$ sont donc nuls, mais la première équation, représentant le déplacement suivant X_1 , doit être égalée à Δ :

$$\begin{cases} \frac{5}{3}aX_1 + aX_2 + 2X_3 = \frac{EI\Delta}{a^2} = \mu \\ aX_1 + \frac{4}{3}aX_2 + \frac{3}{2}X_3 = 0 \\ 2aX_1 + \frac{3}{2}aX_2 + 3X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \frac{3\mu}{a} \quad X_2 = 0 \quad \text{et} \quad X_3 = -2\mu$$

Et l'on retrouve la même épure de moments de flexion que précédemment. Mais cet exemple illustre bien la différence entre un déplacement « imposé » et un déplacement induit par un déplacement imposé.

9.2.5 Calcul des déplacements dans les structures hyperstatiques

Le théorème de Menabrea (dérivé du théorème de Castigliano, voir chapitre 4) permet de calculer le déplacement en un point donné d'une structure composée de poutres et soumise à un système de charges (Q) par une formule du type :

$$\delta = \sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx + \sum \int \frac{tT(Q)}{GK} dx + \sum \int \frac{nN(Q)}{ES} dx + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} R_{\alpha}(Q) r_{\alpha}$$

$M(Q)$, $T(Q)$, $N(Q)$ et $R_{\alpha}(Q)$ sont les sollicitations créées par la charge extérieure (Q) dans l'ensemble de la structure ; m , t , n et r_{α} sont les sollicitations (et les réactions des appuis élastiques éventuels) engendrées par un facteur sollicitant unité, appliqué au point et dans la direction où l'on veut calculer ledit déplacement.

Cette formule est applicable à n'importe quelle structure élastique linéaire, qu'elle soit isostatique ou hyperstatique. Dans le cas d'une structure hyperstatique, on pourrait croire qu'il faut lever deux fois l'indétermination statique, une fois pour calculer $M(Q)$, $T(Q)$, $N(Q)$ et $R_{\alpha}(Q)$ et une autre fois pour calculer les sollicitations unitaires m , n , t et r_{α} . En fait, il n'est pas nécessaire de lever deux fois l'indétermination statique. En effet, en supposant qu'on l'ait levée une fois pour déterminer les sollicitations (et les réactions d'appuis élastiques) dues à la charge extérieure (Q), la structure de départ est strictement équivalente à

la structure isostatique de référence à laquelle on applique (Q) et les facteurs sollicitants X_i avec leur valeur effective : les sollicitations sont les mêmes en tous points, et il en va donc de même pour les déplacements. Ceci est illustré par la figure 9.18.

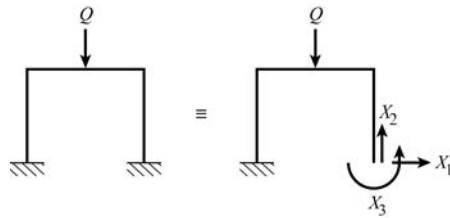


Fig. 9.18. Équivalence des structures

Il en résulte que l'on peut se contenter de calculer les sollicitations unitaires (m, t, n) dans la structure isostatique de référence. De plus, le choix de cette structure de référence n'étant pas unique, on voit que l'on peut donc calculer les sollicitations unitaires dans n'importe quelle structure isostatique associée à la structure de départ. À noter que l'on peut tout aussi bien calculer les sollicitations unitaires dans la structure hyperstatique et les sollicitations dues à la charge extérieure dans la structure isostatique de référence.

En résumé, pour calculer les déplacements dans une structure hyperstatique, on ne lève qu'une fois l'indétermination statique, soit pour calculer les effets de la charge extérieure (Q) soit pour calculer les effets de la charge unité. Les effets de la charge unité ou de la charge (Q) sont ensuite déterminés dans une structure isostatique quelconque dérivant de la structure hyperstatique de départ.

9.3 Efforts et déformations d'origine thermique dans les structures

9.3.1 Déformations d'origine thermique dans une poutre droite isostatique

On considère une poutre droite isostatique à plan moyen et à fibres parallèles. À partir d'un état dans lequel toutes les fibres de la poutre sont à la même température, cette poutre évolue vers un état dans lequel les fibres situées dans le plan de cote z par rapport au plan de la fibre moyenne sont portées à la température $t(z)$. En particulier, on note t_s et t_i les températures des fibres supérieure et inférieure. $t(z)$ représente un écart de température par rapport à la température initiale, supposée uniforme (fig. 9.19).

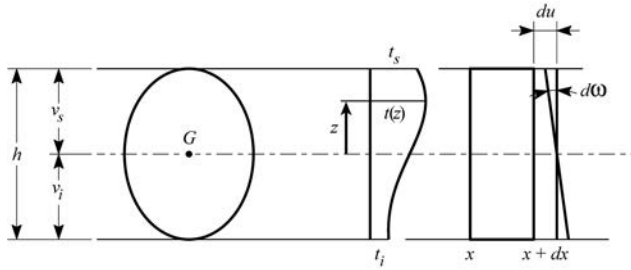


Fig. 9.19. Effets thermiques dans une poutre

Sous l'effet de ces actions thermiques, la poutre se déforme. On suppose que cette déformation respecte le principe de Navier-Bernoulli, c'est-à-dire que les sections droites initialement planes restent planes.

On appelle respectivement du et $d\omega$ l'allongement de la fibre moyenne et la rotation relative des deux sections délimitant un élément de poutre de longueur dx . du est compté positivement dans le sens d'un allongement physique et $d\omega$ est comptée positivement selon les conventions habituelles de la résistance des matériaux. Ainsi, l'allongement algébrique des fibres situées à la cote z est égal à :

$$du - z \cdot d\omega$$

et leur allongement relatif est donc :

$$\varepsilon(z) = \frac{du}{dx} - z \frac{d\omega}{dx}$$

Mais, si à la cote z règne la contrainte σ (comptée positivement en compression) :

$$\varepsilon(z) = -\frac{\sigma(z)}{E} + \alpha t(z)$$

α étant le coefficient de dilatation linéaire du matériau constitutif de la poutre. En égalant ces deux expressions, il vient :

$$\sigma(z) = E \left[\alpha t(z) - \frac{du}{dx} + z \frac{d\omega}{dx} \right] \quad (9.4)$$

On écrit alors que ces contraintes équilibrent un torseur identiquement nul :

$$\iint \sigma dS = 0 = E\alpha \iint t(z) dS - ES \frac{du}{dx} + E \frac{d\omega}{dx} \iint z dS$$

Comme le repère est principal d'inertie, $\iint z dS = 0$, d'où :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{S} \iint t(z) dS$$

De même,

$$\iint z\sigma dS = 0 = E\alpha \iint z t(z) dS - E \frac{du}{dx} \iint z dS + E \frac{d\omega}{dx} \iint z^2 dS$$

D'où :

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\alpha}{I_y} \iint z t(z) dS$$

Dans le cas particulier où la distribution des températures est linéaire entre la fibre inférieure et la fibre supérieure :

$$t(z) = \frac{t_i v_s + t_s v_i}{h} + \frac{t_s - t_i}{h} z$$

en appelant v_s et v_i la distance du centre d'inertie de la section aux fibres supérieure et inférieure et h la hauteur de la section. On calcule alors aisément :

$$\frac{du}{dx} = \alpha \frac{t_i v_s + t_s v_i}{h} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dx} = -\alpha \frac{t_s - t_i}{h}$$

On notera que les effets thermiques dans les poutres n'engendrent pas de déformation transversale.

9.3.2 Calcul des efforts d'origine thermique dans les structures hyperstatiques à appuis invariables

Le calcul des efforts d'origine thermique dans les structures hyperstatiques par la méthode des forces se fait selon un processus analogue à celui développé dans le cas général. Les déplacements dans une structure quelconque sont calculables par des intégrales de Mohr de la forme :

$$\delta = \sum \int \left[\frac{mM(Q)}{EI} + \frac{nN(Q)}{ES} \right] dx$$

Dans cette expression :

– la rotation différentielle $d\omega(Q)$ des sections de poutres sous l'effet du système de chargement (Q) considéré est : $\frac{M(Q)}{EI} dx$.

– l'allongement différentiel $-du(Q)$ de la fibre moyenne des poutres sous l'effet du système de chargement (Q) (N est compté positivement en compression, ce qui explique le signe « moins ») est : $\frac{N(Q)}{ES} dx$.

On peut donc recopier la précédente formule sous la forme :

$$\delta = \sum \int [m \cdot d\omega(Q) - n \cdot du(Q)]$$

Vu sous cet angle, cette formule est transposable au calcul des déplacements dus aux effets thermiques dans les poutres. En effet, il suffit de remplacer $d\omega(Q)$ et $du(Q)$ par les déformations différentielles dues aux effets thermiques. Mais, conformément à une remarque faite au § 9.2.3, les sollicitations unitaires m et n doivent être déterminées dans la structure hyperstatique si on remplace $d\omega$ et du par les valeurs établies au paragraphe précédent pour une *poutre isostatique*, donc libre de se déformer.

Pour résoudre le problème, il faut donc commencer par rendre isostatique la structure hyperstatique donnée en supprimant n liaisons surabondantes (degré d'hyperstaticité n).

Dans tout ce qui suit, on convient de compter positivement le moment fléchissant dans une poutre lorsqu'il tend la fibre conventionnellement portée à la température t_i .

Alors, au droit de la liaison supprimée n° k , le déplacement, suivant la direction de X_k , engendré par les effets thermiques a pour expression :

$$\delta_{k,iso}(T) = \sum \int m_k d\omega - \sum \int n_k du = -\sum \alpha \int m_k \left[\frac{1}{I_y} \iint zt(z) dS \right] - \sum \alpha \int n_k \left[\frac{1}{S} \iint t(z) dS \right] dx$$

Si le gradient de température entre les fibres extrêmes est linéaire (cas le plus fréquent), cette expression devient (en régime stabilisé) :

$$\delta_{k,iso}(T) = -\sum \alpha (t_s - t_i) \int m_k \cdot \frac{dx}{h} - \sum \alpha \int \frac{t_s v_i + t_i v_s}{h} n_k dx$$

En particulier, si l'élévation de température dans les poutres est uniforme $t_s = t_i = T$ et l'on a :

$$\delta_{k,iso}(T) = -\sum \alpha T \int n_k dx$$

L'application de ces formules appelle un certain nombre de remarques :

a) Les expressions de du et $d\omega$ établies au paragraphe précédent supposaient, *a priori*, que les poutres considérées étaient de section constante. On admettra qu'elles restent valables dans le cas de poutres dont la section varie modérément et régulièrement, à condition que les températures t_s et t_i restent identiques sur toute la longueur de la poutre.

b) Le calcul de $\delta_{k,iso}(T)$ fait intervenir les effets d'actions m_k et n_k . Il ne faut jamais omettre le terme n_k car, si les déformations d'effort normal dues aux sollicitations peuvent généralement être négligées devant les déformations de flexion (donc dans le calcul des coefficients δ_{ij} du système résolvant), les déformations longitudinales d'origine thermique dans les poutres ne sont pas négligeables (donc dans le calcul des $\delta_{k,iso}$). En d'autres termes, dans une structure à nœuds rigides, il est souvent possible de ne calculer les coefficients δ_{ij} du système résolvant qu'à partir des épures unitaires de moments de flexion.

c) Pour calculer la déformée de la structure en un point, il convient de cumuler algébriquement le déplacement dû aux sollicitations ayant pris naissance dans les poutres avec le déplacement dû aux effets thermiques dans la structure isostatique de référence.

On cherche, par exemple, le déplacement en un point A donné d'une structure et suivant une direction donnée. Soient M et N les sollicitations unitaires engendrée par l'effort unité appliqué en A suivant la direction voulue, dans une structure isostatique associée à la structure de départ :

$$\delta_A = S \int (M \cdot d\omega + N \cdot du)$$

$d\omega$ et du représentant la rotation et l'allongement différentiels de la fibre moyenne des poutres constituant la structure hyperstatique donnée. Or :

$$d\omega = d\omega_{iso} + d\omega_{hyper} \quad \text{et} \quad du = du_{iso} + du_{hyper}$$

Table des matières

| | |
|--|----|
| Sommaire | 5 |
| Préface..... | 7 |
| Avant-propos..... | 9 |
| CHAPITRE 1 Notions élémentaires sur la théorie de l'élasticité..... | 11 |
| 1.1 Hypothèses | 11 |
| 1.1.1 Homogénéité et continuité de la matière | 11 |
| 1.1.2 Isotropie de la matière..... | 11 |
| 1.1.3 Élasticité de la matière | 12 |
| 1.1.4 Continuité et petitesse des déformations..... | 12 |
| 1.2 Étude géométrique des déformations d'un milieu continu | 12 |
| 1.2.1 Notion de vecteur déformation..... | 13 |
| 1.2.2 Notion de tenseur de déformation | 13 |
| 1.2.3 Caractérisation de la déformation d'un milieu continu | 15 |
| 1.2.4 Équations de compatibilité des déformations..... | 17 |
| 1.2.5 Expressions dans divers systèmes de coordonnées..... | 18 |
| 1.3 Analyse des contraintes..... | 20 |
| 1.3.1 Notion de contrainte..... | 20 |
| 1.3.2 Tenseur des contraintes..... | 21 |
| 1.3.3 Calcul de la contrainte sur une facette..... | 22 |
| 1.3.4 Directions principales des contraintes | 22 |
| 1.3.5 Équations d'équilibre d'un milieu continu..... | 22 |
| 1.4 Loi de Hooke..... | 24 |
| 1.4.1 Expression en coordonnées cartésiennes | 25 |
| 1.4.2 Expressions équivalentes dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques..... | 25 |
| 1.4.3 Valeurs usuelles du module de Young (E) et du coefficient de Poisson ν pour quelques matériaux..... | 26 |

| | | |
|-------------------|---|----|
| 1.5 | Résolution des problèmes d'élasticité linéaire | 26 |
| 1.5.1 | Généralités..... | 26 |
| 1.5.2 | Les équations de Beltrami | 27 |
| 1.6 | Cas particulier de l'élasticité plane | 28 |
| 1.6.1 | Notations | 28 |
| 1.6.2 | Formules en déformation plane..... | 29 |
| 1.6.3 | Formules en contraintes planes | 30 |
| 1.7 | Résolution des problèmes d'élasticité plane (forces volumiques constantes ou absentes) | 31 |
| 1.8 | Énergie potentielle élastique | 32 |
| 1.9 | Recherche des contraintes principales – Représentation de Mohr | 34 |
| 1.10 | Quelques applications de la représentation de Mohr | 36 |
| 1.10.1 | Calcul des contraintes principales – Fissuration du béton..... | 36 |
| 1.10.2 | Poutre en béton avec étriers actifs..... | 38 |
| 1.10.3 | Notion de courbe intrinsèque – Théorie de Rankine..... | 42 |
| CHAPITRE 2 | Bases de la théorie des poutres | 45 |
| 2.1 | Définitions | 45 |
| 2.2 | Rappels géométriques | 46 |
| 2.2.1 | Vecteur unitaire tangent..... | 46 |
| 2.2.2 | Courbure, lorsque (C) est gauche..... | 46 |
| 2.2.3 | Trièdre de Frenet – Torsion géométrique..... | 47 |
| 2.2.4 | Trajectoire d'un point d'une section droite | 48 |
| 2.3 | Recherche pratique de la fibre moyenne | 48 |
| 2.4 | Caractéristiques mécaniques usuelles des sections | 49 |
| 2.4.1 | Rappels sur le calcul des intégrales doubles | 49 |
| 2.4.2 | Aire – Moments statiques – Centre d'inertie d'une section | 50 |
| 2.5 | Efforts internes dans les poutres | 54 |

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| CHAPITRE 3 | Étude des contraintes dans les poutres à section pleine..... | 57 |
| 3.1 | Champ d'application de la résistance des matériaux usuelle – Problème de Saint-Venant | 57 |
| 3.2 | Étude des contraintes normales | 60 |
| 3.2.1 | Calcul des contraintes normales | 60 |
| 3.2.2 | Ligne neutre dans une poutre en flexion pure | 61 |
| 3.2.3 | Contraintes normales en flexion avec effort tranchant | 61 |
| 3.2.4 | Traction et compression excentrées – Noyau central d'une section | 62 |
| 3.2.5 | Déformations d'effort normal et de flexion – Énergie potentielle | 64 |
| 3.3 | Étude des contraintes tangentes dues à l'effort tranchant | 69 |
| 3.3.1 | Hypothèses et formulation de la théorie élémentaire de l'effort tranchant dans les poutres de section pleine | 69 |
| 3.3.2 | Application aux poutres de section rectangulaire | 71 |
| 3.3.3 | Cas général – Poutres de section quelconque | 73 |
| 3.4 | Étude des contraintes tangentes dues à la torsion pure, libre et uniforme | 75 |
| 3.4.1 | Généralités | 75 |
| 3.4.2 | Propriétés générales des contraintes de cisaillement dues à la torsion pure, libre et uniforme | 76 |
| 3.4.3 | Déformation due à la torsion pure des poutres de section pleine – Moment d'inertie de torsion | 80 |
| CHAPITRE 4 | Théorèmes généraux de la résistance des matériaux | 89 |
| 4.1 | Le théorème de Castigliano | 89 |
| 4.1.1 | Énoncé usuel | 89 |
| 4.1.2 | Démonstration élémentaire | 90 |
| 4.1.3 | Extension du théorème de Castigliano aux systèmes dotés d'appuis élastiques | 91 |
| 4.2 | Le théorème de Maxwell-Betti | 91 |
| 4.2.1 | Énoncé | 91 |
| 4.2.2 | Démonstration élémentaire | 92 |
| 4.3 | Application du théorème de Castigliano au calcul des déplacements dans les structures composées de poutres | 93 |
| 4.3.1 | Énergie potentielle de déformation d'une poutre | 93 |

| | | |
|--|---|------------|
| 4.3.2 | Calcul des déplacements dans une structure à poutres dotée de liaisons invariables..... | 93 |
| 4.3.3 | Cas des structures composées de poutres avec appuis élastiques | 95 |
| 4.3.4 | Calcul pratique des intégrales de Mohr | 95 |
| CHAPITRE 5 Contraintes tangentes dans les poutres à parois minces..... | | 99 |
| 5.1 | Contraintes tangentes dues à l'effort tranchant | 99 |
| 5.1.1 | Théorie élémentaire de l'effort tranchant dans les poutres à parois minces à section droite ouverte indéformable..... | 99 |
| 5.1.2 | Théorie élémentaire de l'effort tranchant dans les profils minces à section droite indéformable fermée | 108 |
| 5.1.3 | Exemples d'application | 116 |
| 5.1.4 | Cas particulier des poutres mixtes acier-béton | 123 |
| 5.1.5 | Effet Résal dans les poutres-caisson de hauteur variable | 125 |
| 5.2 | Contraintes tangentes dues à la torsion pure, libre et uniforme | 132 |
| 5.2.1 | Torsion libre des profils minces ouverts | 132 |
| 5.2.2 | Torsion libre des profils minces fermés | 134 |
| 5.2.3 | Cas des profils minces mixtes..... | 142 |
| CHAPITRE 6 Torsion non uniforme et torsion gênée des poutres à section en profil mince ouvert et fermé..... | | 145 |
| 6.1 | Introduction | 145 |
| 6.2 | Contraintes normales liées au gauchissement des sections | 146 |
| 6.2.1 | Rappels et hypothèses de base | 146 |
| 6.2.2 | Hypothèses de la théorie de la torsion non uniforme ou gênée | 147 |
| 6.2.3 | Contraintes normales liées au gauchissement non uniforme | 148 |
| 6.2.4 | Contraintes de cisaillement secondaires..... | 150 |
| 6.3 | Torsion non uniforme et torsion gênée dans les profils minces ouverts..... | 150 |
| 6.3.1 | Gauchissement des sections..... | 150 |
| 6.3.2 | Établissement de l'équation différentielle de torsion..... | 151 |
| 6.3.3 | Résolution de l'équation différentielle de torsion non uniforme ou gênée... .. | 153 |
| 6.3.4 | Efforts internes dans une poutre à section en profil mince ouvert – Bimoment..... | 153 |
| 6.3.5 | Exemple de détermination | 154 |

| | | |
|-------------------|---|-----|
| 6.4 | Torsion non uniforme et torsion gênée des profils minces fermés | 162 |
| 6.4.1 | Établissement des équations différentielles de torsion non uniforme ou gênée | 162 |
| 6.4.2 | Résolution du problème de la torsion gênée ou non uniforme | 166 |
| 6.4.3 | Exemple de détermination | 166 |
| 6.4.4 | Notion de bimoment..... | 174 |
| 6.5 | Extension de la théorie de la torsion non uniforme ou gênée au cas des poutres à fibres non parallèles | 174 |
| 6.5.1 | Étude des poutres à section en profil mince ouvert | 175 |
| 6.5.2 | Étude des poutres à section en profil mince fermé | 177 |
| 6.6 | Torsion non uniforme ou gênée des poutres mixtes | 181 |
| 6.6.1 | Poutres à section en profil mince ouvert..... | 181 |
| 6.6.2 | Poutres à section en profil mince fermé..... | 182 |
| CHAPITRE 7 | Étude des profils minces par l'analyse en ossature plissée | 185 |
| 7.1 | Introduction | 185 |
| 7.2 | Mise en œuvre de la méthode sur un exemple | 186 |
| 7.2.1 | Approche du fonctionnement de la structure | 186 |
| 7.2.2 | Mise en équation du problème et résolution | 187 |
| 7.2.3 | Comparaisons avec l'exemple de détermination..... | 188 |
| 7.3 | Hypothèses de l'analyse en ossature plissée des poutres de section en profil mince | 190 |
| 7.3.1 | Domaine d'application | 190 |
| 7.3.2 | Hypothèses de base de l'analyse des structures linéaires en ossatures plissées | 194 |
| 7.4 | Formulation générale de la méthode | 194 |
| 7.4.1 | Expression des efforts internes..... | 196 |
| 7.4.2 | Équations de compatibilité des contraintes normales | 196 |
| 7.4.3 | Équation des trois contraintes | 197 |
| 7.4.4 | Utilisation pratique des résultats | 198 |
| 7.4.5 | Contraintes de cisaillement..... | 198 |
| 7.4.6 | Déplacements et déformations | 199 |

| | | |
|-------------------|--|-----|
| CHAPITRE 8 | Étude des dalles minces | 201 |
| | 8.1 Équation d'équilibre des plaques minces | 201 |
| | 8.1.1 Hypothèses | 201 |
| | 8.1.2 Déplacements et contraintes dans la plaque..... | 201 |
| | 8.1.3 Effets des actions dans la plaque..... | 203 |
| | 8.1.4 Relations efforts internes-contraintes..... | 204 |
| | 8.1.5 Efforts internes sur une facette d'orientation quelconque | 204 |
| | 8.1.6 Expression des conditions aux limites | 205 |
| | 8.1.7 Remarque | 206 |
| | 8.2 Formules pour les dalles rectangulaires | 207 |
| | 8.3 Cas particulier des plaques de longueur infinie | 209 |
| | 8.4 Cas particulier des plaques circulaires chargées symétriquement | 210 |
| | 8.5 Calcul analytique des dalles rectangulaires | 212 |
| | 8.5.1 Calcul des dalles simplement appuyées sur leurs quatre côtés – Solution de Navier..... | 212 |
| | 8.5.2 Méthode de Maurice Lévy..... | 215 |
| | 8.6 Généralités sur le calcul pratique des dalles | 219 |
| | 8.6.1 Les abaques | 219 |
| | 8.6.2 Les programmes de calcul électroniques | 220 |
| | 8.6.3 Résultats qualitatifs pour les dalles biaisées | 222 |
| | 8.7 La méthode de Guyon-Massonnet | 223 |
| | 8.7.1 Principe de la méthode | 223 |
| | 8.7.2 Intérêt du coefficient K | 225 |
| | 8.7.3 Calcul du moment transversal M_y | 226 |
| | 8.7.4 Calcul du moment de torsion $T_x = -T_y$ | 227 |
| | 8.7.5 Développements en série de Fourier de charges usuelles..... | 227 |
| | 8.7.6 Calcul pratique des efforts dans les dalles | 228 |
| | 8.8 Adaptations de la méthode de Guyon-Massonnet | 230 |
| | 8.8.1 Cas des dalles continues ou hyperstatiques..... | 230 |
| | 8.8.2 Cas des ponts-dalles biaisés..... | 231 |
| | 8.8.3 Cas des dalles d'épaisseur variable transversalement | 231 |

| | | |
|--------------------|--|-----|
| 8.8.4 | Cas des dalles de grande largeur | 232 |
| CHAPITRE 9 | Calcul des structures par la méthode des forces | 233 |
| 9.1 | Analyse statique des structures | 233 |
| 9.1.1 | Les appuis (ou liaisons)..... | 233 |
| 9.1.2 | Définitions | 234 |
| 9.1.3 | Analyse des structures planes à barres articulées | 235 |
| 9.1.4 | Analyse des structures spatiales à barres articulées | 237 |
| 9.1.5 | Remarque générale..... | 238 |
| 9.1.6 | Analyse des structures à nœuds rigides | 239 |
| 9.2 | Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des forces | 241 |
| 9.2.1 | Principe de la méthode | 241 |
| 9.2.2 | Choix du système isostatique de référence | 242 |
| 9.2.3 | Équations canoniques de la méthode des forces pour les systèmes (articulés ou à nœuds rigides) en l'absence de variations linéaires des éléments | 243 |
| 9.2.4 | Exemple traité..... | 244 |
| 9.2.5 | Calcul des déplacements dans les structures hyperstatiques..... | 248 |
| 9.3 | Efforts et déformations d'origine thermique dans les structures | 249 |
| 9.3.1 | Déformations d'origine thermique dans une poutre droite isostatique..... | 249 |
| 9.3.2 | Calcul des efforts d'origine thermique dans les structures hyperstatiques à appuis invariables | 251 |
| 9.3.3 | Remarques | 253 |
| CHAPITRE 10 | Calcul des structures par la méthode des déplacements | 255 |
| 10.1 | Calcul manuel | 255 |
| 10.1.1 | Généralités..... | 255 |
| 10.1.2 | Détermination du nombre des inconnues..... | 256 |
| 10.1.3 | Principe de la méthode des déplacements..... | 258 |
| 10.2 | Calcul matriciel | 264 |
| 10.2.1 | Étude des structures à barres articulées | 264 |
| 10.2.2 | Étude des structures à nœuds rigides..... | 268 |
| CHAPITRE 11 | Méthodes d'étude des poutres droites | 275 |
| 11.1 | Les poutres droites isostatiques à travées multiples | 275 |

| | | |
|--------------------|---|------------|
| 11.1.1 | Introduction | 275 |
| 11.1.2 | Lignes d'influence dans les poutres isostatiques | 276 |
| 11.2 | Les poutres continues hyperstatiques sur appuis simples | 280 |
| 11.2.1 | Calcul des sollicitations dans les poutres continues..... | 280 |
| 11.2.2 | Effets des gradients de température dans les poutres continues | 286 |
| 11.2.3 | Effets de dénivellations d'appuis..... | 286 |
| 11.2.4 | Effets de la précontrainte dans les poutres continues..... | 287 |
| 11.2.5 | Lignes d'influence dans les poutres continues hyperstatiques..... | 289 |
| 11.3 | Étude des poutres droites par la méthode des matrices-transfert..... | 290 |
| 11.3.1 | Rappels..... | 290 |
| 11.3.2 | Notion de matrice-transfert..... | 292 |
| 11.3.3 | Utilisation des matrices-transfert..... | 293 |
| 11.3.4 | Poutres sur « sol » élastique | 297 |
| CHAPITRE 12 | Notions sur la stabilité de l'équilibre des systèmes déformables | 301 |
| 12.1 | Généralités | 301 |
| 12.2 | Le problème d'Euler..... | 301 |
| 12.3 | Valeur de la force critique selon le mode de liaison de la poutre | 303 |
| 12.3.1 | Force critique d'une poutre encastree-libre..... | 306 |
| 12.3.2 | Force critique d'une barre encastree-articulée..... | 307 |
| 12.3.3 | Force critique d'une poutre bi-encastree..... | 307 |
| 12.3.4 | Force critique d'une poutre soumise à un effort de compression porté par son axe..... | 308 |
| 12.3.5 | Notion de longueur critique de flambement..... | 308 |
| 12.4 | Méthode énergétique de détermination des charges critiques..... | 309 |
| 12.5 | Compression excentrée d'une poutre..... | 311 |
| 12.6 | Étude de l'instabilité des structures élastiques | 312 |
| 12.6.1 | Matrice de rigidité d'une barre..... | 312 |
| 12.6.2 | Calcul au flambement des structures élastiques | 316 |
| 12.7 | Conclusion..... | 317 |

| | | |
|--------------------|---|-----|
| CHAPITRE 13 | Poutres courbes planes chargées perpendiculairement à leur plan | 319 |
| 13.1 | Notations et hypothèses de l'étude | 319 |
| 13.2 | Équations élémentaires d'équilibre | 320 |
| 13.2.1 | Équilibre en forces..... | 321 |
| 13.2.2 | Équilibre en moments..... | 321 |
| 13.3 | Étude des déformations en l'absence de gauchissement non uniforme | 322 |
| 13.4 | Quelques applications particulières | 325 |
| 13.4.1 | Effets d'un chargement par une densité uniforme $f_z = -q$ centrée..... | 325 |
| 13.4.2 | Effets d'un chargement par une densité radiale uniforme $f_y = p$ | 327 |
| 13.4.3 | Effets d'une densité linéaire de couples longitudinaux..... | 328 |
| 13.4.4 | Une approche élémentaire des effets de la précontrainte..... | 330 |
| 13.5 | Torsion gênée ou non uniforme dans les tabliers de ponts courbes | 332 |
| 13.5.1 | Cas des poutres dont la section est un profil ouvert..... | 332 |
| 13.5.2 | Cas des poutres dont la section est un profil fermé..... | 334 |
| 13.6 | Conclusion | 335 |
| | Annexes | 337 |
| ANNEXE A1 | Ingénieurs et scientifiques cités | 339 |
| ANNEXE A2 | Les abaques de Pücher | 341 |
| ANNEXE A3 | Nouvelle formulation de l'étude de la flexion transversale suivant la méthode de Guyon-Massonnet | 343 |
| | Bibliographie..... | 373 |
| | Index..... | 375 |

Les fondamentaux de la résistance des matériaux

La **résistance des matériaux** permet de calculer les contraintes et déformations dans les structures (génie mécanique, bâtiment et génie civil). Son application repose sur les lois et les théorèmes de la mécanique générale, notamment sur les lois de la statique et de l'élasticité. Elle fournit des **modèles de comportement simplifiés** qui reposent sur un certain nombre d'hypothèses et d'approximations que l'on oublie parfois, ou dont on sous-estime l'importance, lorsque l'on s'en écarte un tant soit peu. L'objectif de cet ouvrage est de faciliter la compréhension et l'analyse de ces modèles afin d'en optimiser l'utilisation et l'interprétation.

L'ouvrage présente tout d'abord un rappel des théorèmes fondamentaux de la résistance des matériaux ainsi que des modèles de comportement permettant de calculer les efforts internes et les contraintes dans les éléments structuraux courants (poutres, dalles, coques). Il aborde ensuite de manière plus spécifique les calculs mettant en œuvre des cas pratiques pour les structures de génie civil et du bâtiment. Un chapitre propose une synthèse des diverses méthodes, dont certaines historiques, par lesquelles le calcul des dalles et des plaques a été développé. Pour les structures à barres ou à poutres, planes ou tridimensionnelles, les **méthodes dites des forces et des déplacements** sont décrites : elles sont utilisables manuellement dans les cas simples, notamment pour le calcul des poutres droites à travées multiples. Les phénomènes d'instabilité élastique sont également abordés. Enfin, un dernier chapitre présente la complexité du comportement des structures spatiales en s'appuyant sur l'exemple simple d'une poutre plane et courbe, chargée perpendiculairement à son plan.

Cet ouvrage s'adresse aux ingénieurs et techniciens des bureaux d'études qui souhaitent conforter leur maîtrise du sujet et vérifier certains points spécifiques sur les interprétations de modèles.

Il sera également utile aux étudiants (BTS, Licence, Master ou écoles d'ingénieurs) qui souhaitent comprendre des notions parfois complexes de cette discipline.

Jean-Armand Calgario est expert en conception et construction d'ouvrages de génie civil. Il a été professeur à l'ENPC et au CHEC, ancien président du Comité technique 250 (Eurocodes) du CEN et de la Commission française de coordination des Eurocodes (AFNOR).

Daniel Lecointre est ingénieur des Arts et Métiers, professeur à l'ENPC et au CHEC. Il est également consultant, spécialiste des structures.

Sommaire

- ▶ Notions sur la théorie de l'élasticité
- ▶ Bases de la théorie des poutres
- ▶ Étude des contraintes dans les poutres à section pleine
- ▶ Théorèmes généraux de la résistance des matériaux
- ▶ Contraintes tangentes dans les poutres à parois minces
- ▶ Torsion non uniforme et torsion gênée des poutres à section en profil mince ouvert et fermé
- ▶ Étude des profils minces par l'analyse en ossature plissée
- ▶ Étude des dalles minces
- ▶ Calcul des structures : méthode des forces et méthode des déplacements
- ▶ Méthodes d'étude des poutres droites
- ▶ Notions sur la stabilité de l'équilibre des systèmes déformables
- ▶ Poutres courbes planes chargées perpendiculairement à leur plan

EXPERTISE
TECHNIQUE
EDITIONS
LE MONITEUR

CHEC
Centre des Hautes Études
de la Construction

ISSN 2262-5089
ISBN 978-2-281-14698-1

